Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009
Wykłady 2 i 3. Miara

8-9/10/09

MIARA (NIEUJEMNA, PRZELICZLANIE ADDYTYWNA)

Definicja:
Przestrzeń mierzalna to para $(X, \mathcal{F})$, gdzie X jest dowolnym zbiorem (zwanym *przestrzenią*), a $\mathcal{F}$ jest sigma-ciałem pozdbiorów przestrzeni X.

Definicja:
Miarą (w domyśle *nieujemną*) na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$ nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ o własnościach:
1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. dla każdego ciągu parami rozłącznych zbiorów $A_n \in \mathcal{F}$, $\mu(\dot{\bigcup}_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Drugi warunek nazywa się *przeliczalną adytywnością*.

Każda miara posiada następujące własności:
1. $\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$ (*skończona addytywność*),
2. $A \subset B \implies \mu(A) \le \mu(B)$ (*monotoniczność*)
3. $A \subset B \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, o ile tylko $\mu(A) < \infty$,
4. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, o ile tylko $\mu(A \cap B) < \infty$.

Uwagi o miarach skończonych: Następujące warunki są równoważne:
a. $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ (miara przyjmuje tylko wartości skończone),
b. $\mu : \mathcal{F} \to [0, M]$ dla pewenej liczby $M < \infty$ (miara jest ograniczona),
c. $\mu(X) < \infty$.

Miarę spełniającą te warunki nazywamy *miarą skończoną*.

Definicja:
Funkcja $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ określona na rodzinie monotonicznej $\mathcal{M}$ jest *ciągła z dołu* (*z góry*), jeśli dla dowolnego ciągu wstępującego (zstępującego) A_n zbiorów z $\mathcal{M}$ zachodzi

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) \quad \left(\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) \right).$$

Twierdzenie:
Miara μ na sigma-ciele $\mathcal{F}$ jest ciągła z dołu. Jeśli miara jest skończona, to jest ona również ciągła z góry.

Szkic dowodu: Bierzemy wstępujący ciąg zbiorów A_n i zapisujemy jego sumę jako sumę rozłączną różnic $A_n \setminus A_{n-1}$ (konwencja: $A_0 = \emptyset$). Wyrażamy miarę tej sumy jako szereg. Szereg to granica ciągu sum częściowych, a n-ta suma częściowa w tym szeregu to miara zbioru A_n.

Dla miary skończonej ciągłość z góry uzyskujemy przechodząc do dopełnień (prawa de Morgana) i tu stosując ciągłość z dołu.

Przykłady miar

W poniższych przykładach $\mathcal{F}$ może być dowolne, na przykład 2^X.

• Miara zerowa: $\mu(A) = 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$.

• Miara "nieskończoność": $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = \infty$ dla niepustych $A \in \mathcal{F}$.

• Miara licząca: $\mu(A) = \#A$ (dla dowolnych zbiorów nieskończonych przyjmujemy $\#A = \infty$).

• Miara skupiona w punkcie (delta Diraca δ_x): Ustalamy pewien punkt $x \in X$. Miara jest określona następująco: $\mu(A) = 0$ gdy $x \notin A$ oraz $\mu(A) = 1$ gdy $x \in A$.

• Miara atomowa: W przestrzeni X wybieramy pewien podzbiór przeliczalny $Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ (elementy tego zbioru będziemy nazywać *atomami* miary μ) oraz ustalamy pewien ciąg liczb dodatnich p_n (zwanych *masami atomów*). Miara jest określona następująco:

$$\mu(A) = \sum_{n:q_n \in A} p_n.$$

(Intuicyjnie: miara zbioru jest równa sumie mas zawartych w nim atomów).

• Szczególnym przypadkiem miary atomowej jest miara jednorodna (licząca) na zbiorze skończonym: Przestrzeń X jest zbiorem skończonym. Atomami są wszystkie punkty, a ich masy są równe 1. Można tą miarę *unormować* (tzn. przeskalować tak aby $\mu(X) = 1$) dzieląc wszystko przez $\#X$. Wtedy miara zbioru wyraża się wzorem

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#X}.$$

Jest to tzw. miara probabilistyczna jednorodna (często stosowana w kombinatorycznym rachunku prawdopodobieństwa: opisuje sytuację, gdzie wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne).

• Podamy teraz przykład miary, która nie jest ciągła z góry. Niech $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^X$, a μ niech będzie miarą liczącą. Niech $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Wtedy, dla każdego n, $\mu(A_n) = \infty$, a więc $\lim \mu(A_n) = \infty$. Natomiast $\bigcap_n A_n = \emptyset$ i miara tego przekroju wynosi 0.

Dlaczego nie zawsze można przyjąć $\mathcal{F} = 2^X$?

Uzasadnimy teraz konieczność ograniczania dziedziny miary do sigma-ciała mniejszego niż 2^X, jeśli chcemy uzyskać miarę o pewnych pożądanych własnościach.

Niech X będzie okręgiem sparametryzowanym przez $t \in [0, 1)$ (to znaczy utożsamiamy $1 = 0$). Naturalną "miarą" na okręgu, którą można stosować do łuków niezależnie od tego jakie dany łuk ma końce (otwarte czy domknięte, czy jeden taki, drugi siaki), jest tzw. miara łukowa, przyporządkowująca łukowi jego długość (mierzoną po łuku). Równoważnie, jest to miara kątowa unormowana (czyli podzielona przez 2π). Miara ta ma na łukach własność *niezmienniczości na obroty*: każdy łuk ma taką samą miarę jak jego obraz przez dowolny obrót okręgu.

Chcielibyśmy tę miarę rozszerzyć na jakieś sigma-ciało (rodzina łuków nie jest nawet ciałem), aby była to prawdziwa miara przeliczalnie addytywna na sigma-ciele. Chcemy przy tym, aby nadal była to miara niezmiennicza na obroty (w przyszłości pokażemy zresztą, że każda miara określona na sigma-ciele zawierającym łuki i zgadzająca się na łukach z miarą łukową, musi być niezmiennicza na obroty - teraz jednak postawimy ten warunek jako nasze wymaganie). Pokażemy, że miara taka NIE MOŻE być określona na wszystkich podzbiorach okręgu.

Skonstruujemy zbiór A, taki, że żadna miara skończona i niezmiennicza na obroty nie może mieć poprawnie określonej wartości na A.

Na początek wprowadźmy na okręgu relację: $t \approx s \iff |t-s| \in Q$. Jest to relacja równoważności o klasach przeliczalnych: klasa punktu t jest przeliczalnym zbiorem postaci $[t] = \{t - q : q \in Q \cap [0,1)\}$ (dodawanie i odejmowanie traktujemy tu modulo 1, to znaczy do wyniku, w razie potrzeby dodajemy lub odejmujemy 1, tak aby otrzymać liczbę z przedziału $[0,1)$). Dwie klasy są oczywiście bądź sobie równe, bądź rozłączne (jest tak dla każdej relacji równoważności). Niech A będzie *selektorem* z tych klas, to znaczy zbiorem zawierającym po dokładnie jednym elemencie z każdej klasy (w tym miejscu korzystamy z aksjomatu wyboru!)

Zauważmy następujące własności zbioru A:

1. zbiory $A + q$ ($q \in Q \cap [0,1)$) są parami rozłączne;
2. suma tych zbiorów równa się X.

Uzasadnienie 1-ki: Przypuśćmy, że $A + q_1$ i $A + q_2$ zawierają wspólny punkt t, gdzie $q_1 \neq q_2$. Czyli $t = a_1 + q_1 = a_2 + q_2$ (dodawanie mod 1), gdzie $a_1, a_2 \in A$. Zatem $|a_1 - a_2| = |q_1 - q_2|$, co oznacza, że $a_1 \approx a_2$. Ponieważ A zawiera tylko po jednym elemencie z każdej klasy, musi być $a_1 = a_2$, a co za tym idzie, $q_1 = q_2$, sprzeczność.

Uzasadnienie 2-ki: Niech $t \in X$. Wtedy A zawiera punkt a klasy $[t]$, jest on postaci $a = t - q$, gdzie $q \in Q \cap [0,1)$. Wobec tego zbiór $A + q$ zawiera $a + q = t - q + q = t$. Zatem t należy do sumy po wszystkich q zbiorów $A + q$.

Teraz trzeba zauważyć, że suma $\bigcup_{q \in Q \cap [0,1)} A + q$ jest przeliczalna, oraz że z **niezmienniczości miary na obroty** wszystkie składniki tej sumy mają jednakowe miary, powiedzmy $\epsilon \geq 0$ (obrót okręgu o kąt $2\pi\alpha$ opisuje się algebraicznie właśnie jako dodawanie $t \mapsto t + \alpha$ (modulo 1), zatem $A + q$ jest obrazem zbioru A przez obrót o kąt $2\pi q$). Czyli, numerując liczby wymierne z $[0,1)$ jako $q_1, q_2, \ldots$ możemy napisać:

$$1 = \mu(X) = \mu\Big(\dot{\bigcup_n} (A + q_n)\Big) = \sum_n \epsilon.$$

Jeśli $\epsilon = 0$, to prawa strona jest zerem, jeśli zaś $\epsilon > 0$, to prawa strona jest nieskończonością. Nie można uzyskać równości prawej strony z 1-ką (ani żadną inną liczbą skończoną).